<https://fwjmath.wordpress.com/2014/12/07/the-limit-of-computation-6/>

https://fwjmath.wordpress.com/2015/06/22/the-limitation-of-computation-7/

对一个公理系统进行扩充，可以看成对公理系统的一种操作，正如取导集可以看成对点集的一种操作。对于无限次操作之后得到的结果，再施加一次操作，也是有意义的。对于操作来说，重要的不是数量，而是操作的顺序，而序数正适合标记这种顺序。

利用序数，我们能表达无穷次扩充后得到的公理体系。就算无穷次扩充之后，我们仍能一次又一次地进行扩充，直到无穷；但仍能继续扩充，直到无穷次无穷，无穷次无穷次无穷，无穷次无穷次无穷次无穷，如此等等，不一而足；但这并不是终点，我们甚至还能继续进行体系的扩充，达到连用“无穷次无穷次……无穷”也需要重复无穷遍的地方……这令人头晕目眩，但序数可以轻易表达这一切，而这只是序数涵盖领域的九牛一毛而已。

于是，我们能一刻不停地扩充原有的体系，得到一个又一个的新体系，这个过程永无止尽，每一个新的体系都比原来的更强大，而每个体系都拥有自己的一个序数，标志着它们在这个超穷的扩充过程中出现的顺序。每一个能表达出来的序数，都对应着一个公理系统。而所有这些公理体系，依由它们对应的序数，组成了一整个层次结构。

图灵将这一系列的公理系统称为序数逻辑，这个原创的体系正是他的博士论文的研究内容。

他希望这个工具能在某种意义上超越哥德尔不完备性定理。虽然任何一个（可有效生成的）公理体系都不可能同时是一致而完备的，但对于一系列的一致的公理体系而言，这种限制并不存在。即使其中每个公理体系都有不可证明的命题，但如果对于任意的命题，都能在序列中找出一个能证明或否定它的一致的公理体系，那么，在作为一个整体的意义上，这一系列的公理体系是完备的。当然，这与哥德尔不完备性定理并不矛盾，因为一系列可有效生成的公理体系，它们合并起来并不一定是可有效生成的，既然定理的前提不适用，那么定理的结论自然也不适用。

那么，在这个层次结构中的一个“证明”，应该是怎么样的呢？

因为命题总是要在某个体系中被证明，所以首先要指定一个体系，相当于指定这个体系对应的序数，剩下的就是直接写出这个命题在对应体系中的证明。当我们要检验一个证明时，首先查看指定的序数，然后查看对应的体系中的公理，知道公理之后就能如同一般的证明一样进行检验了。

图灵研究的序数逻辑，主要是通过一致性断言扩充而得到的，而这种序数逻辑并没有图灵所期盼的那种完备性。图灵只能证明，他的序数逻辑对于一小类命题（所谓的类）是完备的。这并不尽如人意，但至少第一次跳出了哥德尔不完备性定理的界限。

然而，以后见之明看来，图灵的博士论文中，最大的贡献并不是序数逻辑。在论文第四节中，图灵提出了一个孤立的新概念，这个概念对于论文的其他部分并无深刻贡献，图灵也未曾深入探讨，这使整个第四节看似无关紧要。但在后学看来，这个新概念却是整篇博士论文中最重要的部分，甚至比序数逻辑更重要。可以说，这个概念后来开创了可计算性理论的又一片新天地。

这个概念，叫谕示（oracle）。

“假定我们拥有某种解决数论问题的未知方法；比如说某种谕示。我们不深入这个谕示的本质，除了它不可能是一台机器这一点。通过谕示的帮助，我们可以构筑一种新的机器（叫做o-机），它的基本过程之一就是解决某个给定的数论问题。”

在这里，图灵说的“数论问题”，其实是指描述自然数的一类特殊的逻辑命题，用现在的术语来说叫命题。“数论问题”只是图灵取的一个名字，与真正的数论研究关系不大。

图灵的这段文字其实定义了一种新的图灵机，图灵把它叫做“o-机”，而它的现代术语叫“谕示机”。一台谕示机就是一台有点特别的图灵机，仅仅多了一个新功能，就是能“免费”得到某一个特定的判定问题的答复。比如说，一个带有素数判定谕示的谕示机，除了能做普通图灵机能做的一切事情以外，还能瞬间判定纸带上写的某个自然数是否素数，而不需要实际去计算。

在他的论文中，也确切声明谕示机并不属于机械计算的范畴。也许这就是图灵使用“谕示”这个名字的原因。“谕示”的原文oracle，来自拉丁语中的oraculum，从orare加上物化工具后缀-oculo得到。orare的意思是“祈求”或者“祷告”，而oracle的意思就是“神的宣布”，也就是神谕。图灵是一位无神论者，他相信神是不存在的，所以神谕当然也不存在。用它来命名一台不可能实现的机器，实在是再适合不过了。

对于普通的图灵机而言，停机问题是不可判定的，这早已被证明。而图灵发现，即使将证明中的所有“图灵机”三个字都换成“带有‘数论问题’谕示的谕示机”，其他部分一字不易，证明依然成立！也就是说，就像普通图灵机不能解决关于自身的停机问题，谕示机也不能解决关于自身的停机问题，无论它的谕示有多么强大。

所以，图灵的结论是，存在带有“数论问题”谕示的谕示机也不能解决的问题，但既然这种谕示机能解决所有“数论问题”，所以不能归结为“数论问题”形式的数学问题是存在的。

这一章基本与论文全体独立

一台谕示机其实就是一台图灵机加上一个能解决某个特定判定问题的“谕示”。假设我们有两个特定的判定问题A与B，而我们希望比较两个问题的“难度”。对于判定问题A，我们将记载了A的所有解答的谕示称为谕示A。那么，我们考虑那些带有谕示A的谕示机，它们都能很快解答A的任意实例。如果存在一台这样的谕示机，它总能正确解答判定问题B的话，那么我们就说问题A至少比问题B要难。这跟开卷考试一样，不能奢求每位学生都知道怎么将科目B的问题转化到科目A中，但只要有一名学生知道怎么做，那么这种转化的方法就存在。在这种情况下，我们说问题B能够“图灵规约”到问题A，可以记作 ；如果同时问题A也能图灵规约到问题B的话，我们就说A与B是“图灵等价”的。